Matematika A2 - ukázkové příklady pro zkouškový test - LS 2020-21

1. a) Ukažte, že množina všech řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in R$) tvoří vektorový prostor , jehož bází je fundamentální systém řešení této diferenciální rovnice . (4b)
Popište fundamentální systém řešení pro všechny možnosti řešení charakteristická rovnice. (2b)

b) Najděte řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y = 8e^{2x} - 4\cos 2x$, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (8b)

---

2. Buď dána funkce $f(x,y) = \arcsin\left(x^2 - y\right)$.
   a) Najděte a načrtněte její definiční obor . (2b)
   b) Vypočítejte $\nabla f(1,1)$. (2b)
   c) Napište, co znamená, že funkce $f : M \subset R^n \to R$ je diferencovatelná v bodě $a \in M$ (M je otevřená množina) a co nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě a . (3b)
   d) Ukažte, že funkce f je v bodě (1, 1) diferencovatelná . (2b)
   Určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f a rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $(1,1,0)$. (2b)
   e) Napište lineární aproximaci funkce $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$ (2b)
   f) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ? (2b)

---

3. a) Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničené rovinami $z = 0$ a $x + y + z = 2$ a válcovou plochou $y = x^2$. (8b)
   b) Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z = 0$ a plochami $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$, je-li hustota h tělesa v bodě (x, y, z) přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od osy z . (8b)

---

4. a) Definujte pojmy :
   i) potenciální vektorové pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$ (2b)
   ii) potenciál vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$ a formulujte nutnou podmínku a postačující podmínku pro potenciálnost vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^2$. (2b)

   b) Buď dána v $R^2 - \{[0,0]\}$ funkce $U(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
   i) Najděte v $R^2 - \{[0,0]\}$ vektorové pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce U . (3b)
   ii) Vypočítejte křivkový integrál pole $\vec{f}$ z i) po kladně orientované kružnici o středu v počátku a poloměru R. (3b)

---

5. a) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x,y,z) = 0$ je v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definována implicitně funkce . $z = f(x,y)$. Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ. (4b)
   b) Dokažte, že rovnicí $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 2y + 4 = 0$
   je definována v okolí bodu $(3,1,1)$ implicitní funkce $z = z(x,y)$, $z(x,y) \in C^2(U(3,1))$. (2b)
   c) Ukažte, že bod $(3,1)$ stacionárním bodem funkce $z(x,y)$. (4b)
   d) Nabývá funkce $z(x,y)$ v bodě $(3,1)$ lokální extrém? (6b)

nebo

5. a) Buďte V a W vektorové prostory a L zobrazení z V do W. Co znamená, že L je lineární zobrazení ? (1b)

b) Nechť L je zobrazení, $L : R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \text{ pro lib.vektor } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3;$$

i) Je zobrazení L lineární zobrazení ? (2b)

ii) Existuje k zobrazení L inverzní zobrazení ? Pokud ano, najděte jej. (4b)

nebo

5. a) Napište, co znamená, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje, resp. diverguje. (2b)

b) Rozhodněte o konvergenci nevlastního integrálu $\int_0^\infty \frac{arctg\,x}{x\sqrt{x}}\,dx$ (8b)